全品
— SINCE 1992 —

教育图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30+年专注教育行业

全品学练考

主编 肖德好

导学案

高中数学

必修第一册 RJA

数智教辅

索取二维码
贴此处
激活享受服务

全品AI学伴
7×24小时有问必答
高效预复习，吃透每一课

天津出版传媒集团
天津人民出版社

CONTENTS 目录 导学案

扫码领取
单元真题练习
全科高考真题卷

05 第五章　三角函数

PART FIVE

第一章　集合与常用逻辑用语

AI学习有疑问
扫码添加AI伴学师
讲课智能体

1.1　集合的概念

【学习目标】

1. 了解集合的含义,理解元素与集合的属于关系.
2. 能在自然语言和图形语言的基础上,用符号语言刻画集合.

课前预习

知识导学　素养初识

◆ 知识点一　元素与集合的含义

1. 元素的含义与表示:一般地,我们把研究对象统称为________,用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.

2. 集合的含义与表示:把一些元素____________叫作集合(简称为集),通常用大写拉丁字母 A,B,C,…表示.

3. 集合元素的特性:________性、________性、无序性.

4. 集合相等:只要构成两个集合的________是一样的,我们就称这两个集合是相等的.

5. 元素与集合的关系:如果 a 是集合 A 中的元素,就说 a________集合 A,记作________;如果______________________,就说 a 不属于集合 A,记作________.

6. 常用数集及其记法:

常见的数集	符号表示
自然数集	________
正整数集	________或________
整数集	________
有理数集	________
实数集	________

【诊断分析】1. 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)中国著名的科学家可以组成一个集合.　(　　)

(2)参加2026年冬奥会的国家和地区代表团可以组成一个集合.　(　　)

(3)不超过 π 的实数可以组成一个集合.　(　　)

2. 某中学高一年级共8个班,这8个班组成一个集合 A.

(1)高一(2)班、高二(8)班是集合 A 中的元素吗?

(2)若 $a\in A$,$b\in A$,则元素 a,b 有什么关系?为什么?

◆ 知识点二　集合的表示法

1. 列举法:把集合的所有元素一一列举出来,并用____________括起来表示集合的方法叫作列举法(注意元素间要用","隔开,如$\{-1,0,1,2\}$).

2. 描述法:设 A 是一个集合,把集合 A 中所有具有________特征 $P(x)$ 的元素 x 所组成的集合表示为____________,这种表示集合的方法称为描述法.

【诊断分析】1. 方程 $(x+1)(x-2)=0$ 的实数根组成的集合中有多少个元素?并用适当的方法表示这个集合.

2. 由抛物线 $y=x^2$ 上的点组成的集合中有多少个元素?并用适当的方法表示这个集合.

◆ **探究点一　元素与集合的含义**

例 1 下列各项中,不可以组成集合的是　(　　)

A. 所有的正数

B. 方程 $x^2=1$ 的实数根

C. 2025 年第四季度见义勇为勇士榜上榜勇士

D. 我校很喜欢足球的同学

变式 (多选题)下列各项中,不能组成集合的是　(　　)

A. 无限接近 0 的实数

B. 周长为 10 cm 的三角形

C. 高一(1)班视力比较好的同学

D. 参加中国共产党第二十届三中全会的全体代表

例 2 (1)用符号"∈"或"∉"填空:0________ $\mathbf{N}$;$\frac{1}{3}$________ $\mathbf{Q}$;2.4 ________ $\mathbf{Z}$;$\sqrt{5}$ ________ $\mathbf{Q}$;4________ $\mathbf{Z}$.

(2)已知集合 $A=\left\{\sqrt{2}m+\sqrt{3}\,\middle|\,m\in\mathbf{Z}\right\}$,则　(　　)

A. $\sqrt{2}\in A$　　B. $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin A$

C. $\sqrt{3}\in A$　　D. $\sqrt{3}-\sqrt{2}\notin A$

变式 (1)下列元素与集合的关系中,正确的是(　　)

A. $-1\in\mathbf{N}$　　B. $0\notin\mathbf{N}^*$

C. $\sqrt{3}\in\mathbf{Q}$　　D. $\frac{2}{5}\notin\mathbf{R}$

(2)(多选题)下列说法正确的是　(　　)

A. $\mathbf{N}^*$ 中最小的数是 1

B. 若 $-a\notin\mathbf{N}^*$,则 $a\in\mathbf{N}^*$

C. 若 $a\in\mathbf{N}^*$,$b\in\mathbf{N}^*$,$a\neq b$,则 $a+b$ 的最小值是 3

D. $x^2+4=4x$ 的实数解组成的集合中含有 2 个元素

(3)设集合 M 满足:① $2\notin M$;② 若 $x\in M$,则 $\frac{2}{2-x}\in M$.已知 $3\in M$,则 M 中必含有的元素是________.

[素养小结]

(1)判断元素能否组成集合,关键是集合中元素的确定性,即能否找到一个明确的评判标准来衡量元素是否为集合中的元素,若标准明确则可以组成集合,否则不可以.

(2)判断一个元素是否属于某一集合,就是判断这个元素是否满足该集合元素的条件.若满足,就是"属于"关系;若不满足,就是"不属于"关系.特别注意,符号"∈"与"∉"只表示元素与集合的关系.

◆ **探究点二　集合中元素的特性**

例 3 (1)若以集合 A 中的四个元素 a,b,c,d(a,b,c,d 均为正数)为边长构成一个四边形,则这个四边形可能是　(　　)

A. 梯形　　B. 平行四边形

C. 菱形　　D. 矩形

(2)已知集合 A 中有三个元素 $0,a-3,a^2-2a$,且 $-1\in A$,则实数 $a=$________.

变式 (1)已知集合 A 中含有三个元素 $x,x+1,1$,集合 B 中含有三个元素 x,x^2+x,x^2,且 A 与 B 中的元素相同,则实数 x 的值为________.

(2)若集合 $\{x\mid ax^2+2x+1=0\}$ 中只含有一个元素 b,则 b 的值为________.

[素养小结]

(1)对于求集合中字母参数的问题,常根据集合中元素的确定性得出字母的所有可能取值,再利用集合中元素的互异性进行检验.

(2)在利用集合中元素的特性解题时常用分类讨论思想,注意分类的标准要明确.

◆ **探究点三　集合的表示**

角度 1　列举法表示集合

例 4 用列举法表示下列集合.

(1)中国的直辖市组成的集合;

(2)15 的正约数组成的集合;

(3)满足 $-2\leqslant x\leqslant 3$ 且 $x\in\mathbf{Z}$ 的数组成的集合;

(4)直线 $y=x$ 与 $y=2x-1$ 的交点组成的集合.

[素养小结]

用列举法表示集合应注意的三点：

(1)应先弄清集合中的元素是什么,是数还是点,还是其他元素；

(2)集合中的元素一定要写全,但不能重复；

(3)若集合中的元素是点,则应将有序实数对用小括号括起来表示一个元素.

角度 2　描述法表示集合

例 5　用描述法表示下列集合.

(1)二次函数 $y=x^2+1$ 的函数值组成的集合 A；

(2)被 3 除余 2 的正整数组成的集合 B；

(3)正奇数组成的集合 C.

变式　用适当的方法表示下列集合.

(1)中国古代四大发明组成的集合；

(2)二次函数 $y=x^2-4$ 的函数值组成的集合；

(3)方程 $x^2=x$ 的所有实数解组成的集合；

(4)不等式 $3x\geqslant 4-2x$ 的解组成的集合.

[素养小结]

(1)用描述法表示集合,应先弄清集合的属性,是数集、点集还是其他的类型.一般地,数集用一个字母代表其元素,而点集则用一个有序实数对来代表其元素.

(2)若描述部分出现元素记号以外的字母时,则要对新字母说明其含义或指出其取值范围.

1.2　集合间的基本关系

【学习目标】

1. 理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集.

2. 能使用 Venn 图表达集合的基本关系,体会图形对理解抽象概念的作用.

3. 在具体情境中,了解空集的含义.

课前预习　知识导学　素养初识

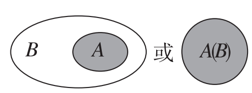
◆ **知识点一　子集**

1. Venn 图:在数学中,我们经常用平面上封闭曲线的________代表集合,这种图称为 Venn 图.

2. 子集

定义	一般地,对于两个集合 A,B,如果集合 A 中__________元素都是集合 B 中的元素,就称集合 A 为集合 B 的子集

(续表)

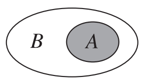
记法与读法	记作______(或______),读作“A 包含于 B”(或“B 包含 A”)
图示	
结论	(1)反身性:任何一个集合是它本身的子集,即 A____A； (2)传递性:对于集合 A,B,C,若 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq C$,则 A____C

◆ **知识点二　集合的相等关系**

1. 定义：一般地，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素，那么集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.

2. 也就是说，若 $A\subseteq B$，且________，则 $A=B$.

◆ **知识点三　真子集**

定义	如果集合 $A\subseteq B$，但存在元素__________，且________，就称集合 A 是集合 B 的真子集
记法与读法	记作 $A\subsetneqq B$（或 $B\supsetneqq A$），读作"A 真包含于 B"（或"B 真包含 A"）
图示	
结论	(1)$A\subsetneqq B$ 且 $B\subsetneqq C$，则 A____C； (2)$A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则 A____B

◆ **知识点四　空集**

定义	一般地，我们把__________________的集合叫作空集
记法	记为$\varnothing$
规定	空集是任何集合的______，即$\varnothing\subseteq A$
特性	(1)空集只有一个子集，即它本身，$\varnothing\subseteq\varnothing$； (2)若 $A\neq\varnothing$，则$\varnothing$________A，即空集是任意非空集合的真子集

【诊断分析】 1. 判断正误.（请在括号中打"√"或"×"）

(1)$\{0\}\subseteq\{x\mid x<5,x\in\mathbf{R}\}$.　　(　　)

(2)$\varnothing\subseteq\{0\}$，且$\varnothing\subsetneqq\{0\}$.　　(　　)

(3)任何一个集合都至少有 2 个子集.　　(　　)

2. 包含关系与属于关系有什么区别？

课中探究

考点探究　素养小结

◆ **探究点一　集合间关系的判断**

例 1　判断下列每对集合之间的关系.

(1)$C=\{1,2,3,4\}$，$D=\{x\mid x$ 是 12 的正约数$\}$；

(2)$E=\{x\mid x>3$ 且 $x<-1\}$，$F=\{x\mid x<-1$ 或 $x>3\}$；

(3)$A=\{x\mid x=2k+1,k\in\mathbf{N}\}$，$B=\{y\mid y=4m+1,m\in\mathbf{N}\}$.

变式　(1)设 $M=\{x\mid x=6k-2,k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\mid x=3k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，则　　(　　)

A. $M\subseteq N$　　B. $N\subseteq M$

C. $M=N$　　D. $M\not\subseteq N$

(2)[教材 P9 习题 1.2 第 2 题] 指出下列各集合之间的关系，并用 Venn 图表示：

$A=\{x\mid x$ 是四边形$\}$，$B=\{x\mid x$ 是平行四边形$\}$，$C=\{x\mid x$ 是矩形$\}$，$D=\{x\mid x$ 是正方形$\}$.

[素养小结]

判断集合间关系的方法：

(1)观察法：一一列举观察.

(2)元素特征法：首先确定集合的元素是什么，弄清集合元素的特征，再利用集合元素的特征判断关系.

(3)数形结合法：利用数轴或 Venn 图.往往通过具体验证的方法判断端点值是否取到.

◆ 探究点二　集合的子集、真子集

例 2 分别写出集合$\{a\}$,$\{a,b\}$,$\{a,b,c\}$的所有子集和真子集,并写出它们的子集和真子集的个数.由此猜想含 n 个元素的集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$的所有子集的个数是多少?真子集的个数及非空真子集的个数呢?

变式 (1)设集合 $A=\{1,2,3,4,5,9\}$,$B=\{x|x\in A,\sqrt{x}\in \mathbf{Z}\}$,则 B 的非空子集的个数为　(　　)

A. 3　　　　B. 4

C. 7　　　　D. 8

(2)已知集合 M 满足$\{1,2\}\subsetneqq M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$,写出所有满足条件的集合 M.

[素养小结]

求集合的子集问题的一般方法:求给定集合的子集(真子集)时,一般按照子集所含元素的个数分类,再依次写出符合要求的子集(真子集).在写子集时,注意不要忘记空集和集合本身.

◆ 探究点三　由集合间的关系求参数

例 3 (1)已知集合 $A=\{x|x^2\leqslant 1\}$,$B=\{x|x>m\}$,若 $A\subseteq B$,则 m 的取值范围是________.

(2)已知集合 $A=\{x|0<x<2\}$,$B=\{x|1<x<a\}$,若 $B\subseteq A$,则实数 a 的取值范围是　(　　)

A. $a>2$　　　　B. $a<2$

C. $1<a\leqslant 2$　　　　D. $a\leqslant 2$

变式 已知集合 $A=\{x|x<-1$ 或 $x>4\}$,$B=\{x|2a\leqslant x\leqslant a+3\}$,若 $B\subsetneqq A$,求实数 a 的取值范围.

[素养小结]

由集合间的关系求参数问题的注意点及常用方法:

(1)注意点:①不能忽视集合为$\varnothing$的情形;②当集合中含有字母参数时,一般需要分类讨论.

(2)常用方法:对于用不等式给出的集合,已知集合的包含关系求相关参数的范围(值)时,常采用数形结合的思想,借助数轴解答.

1.3　集合的基本运算

第1课时　集合的并集、交集

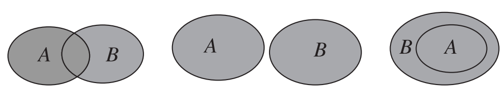
【学习目标】

1. 理解并集、交集的概念，会用文字语言、符号语言及图形语言来描述这些概念.
2. 了解并集、交集的一些简单性质，会求两个简单集合的并集与交集.
3. 能使用 Venn 图表示两个集合的并集与交集，体会图形对理解抽象概念的作用.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ **知识点一　集合的并集**

1. 并集的三种语言表示：

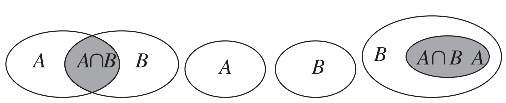
文字语言	一般地，由所有__________________的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的并集，记作______(读作“A 并 B”)
符号语言	$A\cup B=\{x\mid$__________$\}$
图形语言	

2. 并集的运算性质

(1)$A\cup A=A$；(2)$A\cup\varnothing=A$；(3)$A\cup B=B\cup A$；(4)若 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=B$，反之也成立.

◆ **知识点二　集合的交集**

1. 交集的三种语言表示：

文字语言	一般地，由所有__________________的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的交集，记作______(读作“A 交 B”)
符号语言	$A\cap B=\{x\mid$__________$\}$
图形语言	

2. 交集的运算性质

(1)$A\cap A=A$；(2)$A\cap\varnothing=\varnothing$；(3)$A\cap B=B\cap A$；(4)若 $A\subseteq B$，则 $A\cap B=A$，反之也成立.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)设 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid x<5\}$，$B=\{2,3,5\}$，则 $A\cup B=\{x\in\mathbf{N}\mid x\leqslant 5\}$.　(　　)

(2)$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.　(　　)

(3)若 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5,6\}$，则 A 与 B 的交集为空集.　(　　)

(4)若 $x\in A\cup B$，则 $x\in A\cap B$.　(　　)

(5)若 $x\in A\cap B$，则 $x\in A\cup B$.　(　　)

课中探究　考点探究　素养小结

◆ **探究点一　并集及其运算**

例1 (1)设集合 $A=\{4,5,6,8\}$，$B=\{3,5,7,8\}$，则集合 $A\cup B=$　(　　)

A. $\{5,8\}$

B. $\{3,4,5,6,7,8\}$

C. $\{4,6\}$

D. $\{3,4,6,7\}$

(2)已知集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid x<-1$ 或 $x>4\}$，那么 $A\cup B=$　(　　)

A. $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 4\}$

B. $\{x\mid x\leqslant 3$ 或 $x>4\}$

C. $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant -1\}$

D. $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$

变式 (1)若 $A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{y\mid y=2x,x\in A\}$，则 $A\cup B=$　(　　)

A. $\{0,2,4,6\}$　　B. $\{0,2\}$

C. $\{0,1,2,3,4,6\}$　　D. $\{0,1,2,3,0,2,4,6\}$

(2)已知集合 $M=\{-1,0\}$，则满足 $M\cup N=\{-1,0,1\}$的集合 N 的个数是________.

[素养小结]

并集运算应注意的问题：

(1)对于用描述法表示的集合，应先看集合的代表元素是什么，然后将集合化简，再按定义求解.

(2)求两个集合的并集时要注意利用集合中元素的互异性这一属性，重复的元素只能算一个.

(3)对于元素个数无限的集合进行并集运算时，可借助数轴，利用数轴分析法求解，但要注意端点的值能否取到.

◆ 探究点二　交集及其运算

例 2 (1)已知集合 $M=\{x|-1<x\leqslant 1\}$，$N=\{x|0<x<2\}$，则 $M\cap N=$ (　　)

A. $\{x|0<x\leqslant 1\}$

B. $\{x|0<x<1\}$

C. $\{x|-1<x\leqslant 1\}$

D. $\{x|-1<x<2\}$

(2) 设集合 $A=\{-2,2\}$，$B=\{x|x^2-5x-m=0\}$. 若 $A\cap B=\{2\}$，则 $B=$ (　　)

A. $\{-2,3\}$　　B. $\{2\}$

C. $\{-2,2\}$　　D. $\{2,3\}$

变式 (1)已知集合 $A=\{(x,y)|y=x\}$，$B=\{(x,y)|y=5-4x\}$，则 $A\cap B=$ (　　)

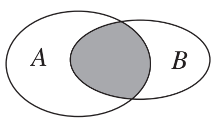
A. $(1,1)$

B. $\{(1,1)\}$

C. $(-1,-1)$

D. $\{(-1,-1),(1,1)\}$

(2)已知集合 $A=\{x\in\mathbf{N}|1\leqslant x\leqslant 10\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}|x^2+x-6=0\}$，则图中阴影部分表示的集合为



(　　)

A. $\{2\}$　　B. $\{3\}$

C. $\{-3,2\}$　　D. $\{-2,3\}$

[素养小结]

求集合 $A\cap B$ 的常见类型：

①若 A，B 中的元素是方程的根，则应先解方程求出方程的根，再求两集合的交集.

②若 A，B 中的元素是有序实数对，则 $A\cap B$ 是指两个方程组成的方程组的解集，交集是点集.

③若 A，B 是无限数集，则可以利用数轴来求解，但要注意利用数轴表示不等式时，含有端点的值用实心点表示，不含有端点的值用空心圈表示.

◆ 探究点三　根据并集与交集运算求参

例 3 已知集合 $A=\{x|-3\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x|m-2\leqslant x\leqslant 2m+1\}$.

(1)若 $A\cup B=A$，求实数 m 的取值范围；

(2)若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

变式 已知集合 $A=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}<x<3\right\}$，$B=\{x|2m<x<1-m\}$.

(1)若 $A\cup B=B$，求实数 m 的取值范围；

(2)若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

[素养小结]

(1)在利用交集、并集的性质解题时，常常会遇到 $A\cap B=A$，$A\cup B=B$ 这类问题，解答时常借助于交、并集的定义以及集合间的关系去分析，如由 $A\cap B=A$ 得 $A\subseteq B$，由 $A\cup B=B$ 得 $A\subseteq B$ 等.

(2)当集合 $B\subseteq A$ 时，如果集合 A 是一个确定的集合，而集合 B 不确定，那么运算时要考虑 $B=\varnothing$ 的情况.

第 2 课时　集合的全集、补集

【学习目标】

1. 在具体情境中,了解全集的含义.
2. 理解在给定集合中一个子集的补集的含义,能求给定子集的补集.
3. 能使用 Venn 图表示集合的基本运算,体会图形对理解抽象概念的作用.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ 知识点一　全集

(1)定义:一般地,如果一个集合含有所研究问题中涉及的________,那么就称这个集合为全集.

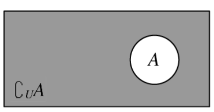
(2)记法:全集通常记作______.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)在集合运算中,全集一定是实数集 $\mathbf{R}$.　(　　)

(2)为了研究集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$,$B=\{1,2,3\}$,$C=\{1,3,5\}$之间的关系,要从中选一个集合作为全集,这个集合是 A.　(　　)

◆ 知识点二　补集的概念及性质

<table>
<tr><td rowspan="3">定义</td><td>文字语言</td><td>对于一个集合 A,由全集 U 中________的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集,简称为集合 A 的补集,记作______</td></tr>
<tr><td>符号语言</td><td>$\complement_U A=\{x\mid$________$\}$</td></tr>
<tr><td>图形语言</td><td></td></tr>
<tr><td>性质</td><td colspan="2">(1) $\complement_U A\subseteq U$;
(2) $\complement_U U=$______, $\complement_U\varnothing=$______;
(3) $\complement_U(\complement_U A)=$______;
(4) $A\cup(\complement_U A)=$______, $A\cap(\complement_U A)=$______</td></tr>
</table>

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)一个集合的补集一定含有元素.　(　　)

(2)设全集 $U=\mathbf{R}$,存在 $x_0\in U$,$x_0\notin A$,且 $x_0\notin\complement_U A$.　(　　)

(3)设全集 $U=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,$A=\{(x,y)\mid x>0$ 且 $y>0\}$,则 $\complement_U A=\{(x,y)\mid x\leqslant 0$ 且 $y\leqslant 0\}$.　(　　)

课中探究　考点探究　素养小结

◆ 探究点一　补集的简单运算

例 1 (1)已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$,集合 $M=\{1,2,3,4\}$,则 $\complement_U M=$　(　　)

A. 5　　B. $\{5\}$

C. $\{3,4\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

(2)已知集合 $U=\mathbf{R}$,$A=\{x\mid x\leqslant -1$ 或 $x>2\}$,则 $\complement_U A=$　(　　)

A. $\{x\mid x<-1$ 或 $x>2\}$

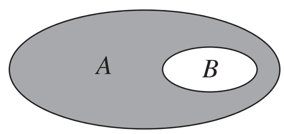
B. $\{x\mid -1<x\leqslant 2\}$

C. $\{x\mid x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 2\}$

D. $\{x\mid -1<x<2\}$

(3)已知全集 $U=\{2,4,6,8,10\}$,集合 $A=\{2,a,8\}$,$\complement_U A=\{4,10\}$,则 $a=$______.

变式 (1)集合 $A=\{x\mid y=\sqrt{x-1}\}$,$B=\{y\mid y=x^2+2\}$,则图中阴影部分表示的集合为　(　　)



A. $\{x\mid x\geqslant 1\}$

B. $\{x\mid x\geqslant 2\}$

C. $\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$

D. $\{x\mid 1\leqslant x<2\}$

(2)已知全集 U,集合 $A=\{1,3,5,7\}$,$\complement_U A=\{2,4,6\}$,$\complement_U B=\{1,4,6\}$,则集合 $B=$______.

[素养小结]

求集合的补集的方法:

(1)定义法:当集合中的元素较少时,可利用定义直接求解.

(2)Venn 图法:借助 Venn 图可直观地求出补集.

(3)数轴法:当集合中的元素连续且无限时,可借助数轴求解,此时需注意端点取值.

◆ 探究点二　并集、交集、补集的综合运算

例 2 (1)已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,$A=\{2,3,4,5\}$,$B=\{2,3,6,7\}$,则 $B\cap(\complement_U A)=$　　(　　)

A. $\{1,6\}$　　B. $\{1,7\}$

C. $\{6,7\}$　　D. $\{1,6,7\}$

(2)已知集合 $U=\{x\mid 1<x\leqslant 7\}$,$A=\{x\mid 2\leqslant x<5\}$,$B=\{x\mid 3\leqslant x<7\}$.

求:①$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$;②$\complement_U(A\cap B)$.

变式 (1)(多选题)已知集合 $A=\{x\mid x<2\}$,$B=\{x\mid 3-2x>0\}$,则　　(　　)

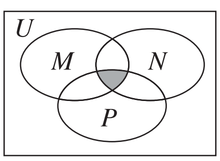
A. $A\cap B=\left\{x\,\middle|\,x<\frac{3}{2}\right\}$

B. $A\cap(\complement_{\mathbf{R}} B)=\left\{x\,\middle|\,\frac{3}{2}\leqslant x<2\right\}$

C. $A\cup B=\left\{x\,\middle|\,x<\frac{3}{2}\right\}$

D. $(\complement_{\mathbf{R}} A)\cup B=\mathbf{R}$

(2)[2026·合肥六中高一期中]如图,U 是全集,M,N,P 是 U 的子集,则阴影部分表示的集合是　　(　　)



A. $(\complement_U M)\cap(N\cap P)$　　B. $M\cup(N\cap P)$

C. $M\cap(N\cap P)$　　D. $(\complement_U M)\cup(N\cap P)$

[素养小结]

(1)解决与集合的交、并、补集运算有关的综合问题时,一般先运算括号内的部分,如求$(\complement_U A)\cap B$ 时,可先求出 $\complement_U A$,再求交集;求 $\complement_U(A\cup B)$时,可先求出 $A\cup B$,再求补集.

(2)不等式中的等号在补集中能否取到,要引起重视,还要注意补集是全集的子集.

◆ 探究点三　利用集合间的关系求参

例 3 已知集合 $A=\{x\mid a-1<x<2a\}$,$B=\{x\mid 2<x\leqslant 10\}$,$U$ 是全集,若$(\complement_U A)\supseteq(\complement_U B)$,求实数 a 的取值范围.

变式 (1)设 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\{x\mid x^2+3x+2=0\}$,$B=\{x\mid x^2+(m+1)x+m=0\}$,若$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$,则实数 $m=$________.

(2)已知全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$,$B=\{x\mid a+1\leqslant x\leqslant 2a-1\}$,且 $A\subseteq\complement_U B$,求实数 a 的取值范围.

[素养小结]

由集合的补集求解参数的方法:

(1)当集合中元素个数有限时,可利用补集定义并结合集合知识求解.

(2)当集合中元素个数无限时,一般利用数轴分析法求解.

1.4 充分条件与必要条件

1.4.1 充分条件与必要条件

【学习目标】

1. 通过对典型数学命题的梳理，理解充分条件的意义，理解判定定理与充分条件的关系.
2. 通过对典型数学命题的梳理，理解必要条件的意义，理解性质定理与必要条件的关系.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ 知识点 充分条件与必要条件

	"若 p，则 q"为真命题	"若 p，则 q"为假命题
推出关系	p______q	p______q
条件关系	p 是 q 的______条件 q 是 p 的______条件	p 不是 q 的______条件 q 不是 p 的______条件
定理关系	一般地，数学中的每一条判定定理都给出了相应数学结论成立的一个充分条件； 一般地，数学中的每一条性质定理都给出了相应数学结论成立的一个必要条件	

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)"$x^2=y^2$"是"$x=y$"的充分条件. ( )

(2)"内错角相等"是"两直线平行"的充分条件. ( )

(3)"$b=0$"是"$ab=0$"的必要条件. ( )

(4)"两个三角形的面积相等"是"两个三角形全等"的必要条件. ( )

课中探究 考点探究 素养小结

◆ 探究点一 充分条件、必要条件的判断

例1 下列"若 p，则 q"形式的命题中，哪些命题中的 p 是 q 的充分条件?

(1)若 $4x^2-mx+9$ 是完全平方式，则 $m=12$；

(2)若 $(x-1)^2+(y-2)^2=0$，则 $(x-1)(y-2)=0$；

(3)在△ABC 中，若 $A+B=90°$，则 $C=90°$.

例2 下列各题中，哪些 q 是 p 的必要条件?

(1)p：$x=1$，q：$x-1=\sqrt{x-1}$；

(2)p：$-2\leqslant x\leqslant 5$，q：$-1\leqslant x\leqslant 5$；

(3)p：a 是自然数，q：a 是正整数；

(4)p：三角形是等边三角形，q：三角形是等腰三角形.

变式 下列各题中，哪些 p 是 q 的充分条件？哪些 p 是 q 的必要条件?

(1)p：$A\cap B=A$，q：$A\subsetneqq B$.

(2)p：四边形是矩形，q：四边形的对角线相等.

[素养小结]

充分条件、必要条件的几种判定方法：

(1)定义法：根据 $p\Rightarrow q$，$q\Rightarrow p$ 进行判断，适用于定义、定理的判断性问题.

(2)集合法：根据 p，q 成立的对象组成的集合之间的包含关系进行判断，多适用于命题中涉及参数范围的推断问题.

◆ **探究点二　充分条件、必要条件的应用**

例 3 [2026·漳州一中高一月考] 已知集合 $P=\{x|-2\leqslant x\leqslant 10\}$，非空集合 $S=\{x|1-m<x<1+m\}$.

(1)若“$x\in P$”是“$x\in S$”的必要条件，求实数 m 的取值范围.

(2)是否存在实数 m，使“$x\in P$”是“$x\in S$”的充分条件？若存在，求出 m 的取值范围；若不存在，说明理由.

变式 (1)已知 $p:-4<x-a<4$，$q:2<x<3$，若 p 是 q 的必要条件，则实数 a 的取值范围是________.

(2)若 $p:x^2+x-6=0$ 是 $q:ax+1=0(a\neq 0)$ 的必要条件但不是充分条件，则实数 a 的值为________.

[素养小结]

根据充分条件、必要条件求参数的取值范围时，主要根据充分条件、必要条件与集合间的关系，将问题转化为相应的两个集合之间的包含关系，然后建立关于参数的不等式(组)进行求解，有时还需要借助数轴解决问题.

1.4.2　充要条件

【学习目标】

通过对典型数学命题的梳理，理解充要条件的意义，理解数学定义与充要条件的关系.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ **知识点　充要条件的概念**

1. 逆命题

将命题“若 p，则 q”中的条件 p 和结论 q 互换，就得到一个新的命题“若 q，则 p”，称这个命题为原命题的逆命题.

2. 充要条件

如果“若 p，则 q”和它的逆命题“若 q，则 p”均是真命题，即既有 $p\Rightarrow q$，又有 $q\Rightarrow p$，就记作________.此时，p 既是 q 的充分条件，也是 q 的必要条件，我们说 p 是 q 的______________，简称为__________.显然，如果 p 是 q 的充要条件，那么 q 也是 p 的充要条件. 概括地说，如果 $p\Leftrightarrow q$，那么 p 与 q____________.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1) 已知 p：两个角是对顶角，q：两个角相等，则 p 是 q 的充要条件.　(　　)

(2)已知 $p:x=0$ 且 $y=0$，$q:x^2+y^2=0$，则 p 是 q 的充要条件.　(　　)

(3)已知 p：集合 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，$C\subseteq A$，q：集合 $A=B=C$，则 p 是 q 的充要条件.　(　　)

课中探究　考点探究　素养小结

◆ **探究点一　充要条件的判断**

例 1 下列各题中，试分别指出 p 是 q 的什么条件.

(1)$p:ab=0$，$q:a=0$；

(2)p：四边形的对角线相等，q：四边形是正方形；

(3)p：a 是无理数，q：$a+5$ 是无理数；

(4)$p:A\subseteq B$，$q:A\cup B=B$.

[素养小结]

判断 p 是 q 的充要条件的两种思路:

(1)命题角度:判断 p 是 q 的充要条件,主要是判断 $p\Rightarrow q$ 及 $q\Rightarrow p$ 是否成立.若 $p\Rightarrow q$ 成立,则 p 是 q 的充分条件,同时 q 是 p 的必要条件;若 $q\Rightarrow p$ 成立,则 p 是 q 的必要条件,同时 q 是 p 的充分条件;若二者都成立,则 p 与 q 互为充要条件.

(2)集合角度:关于充分条件、必要条件、充要条件,当不容易判断 $p\Rightarrow q$ 及 $q\Rightarrow p$ 是否成立时,也可以从集合角度去判断,结合集合中"小集合⇒大集合"的关系来理解,这对解决与逻辑有关的问题大有益处.

此外,对于较复杂的关系,常用⇒,⇐,⇔等符号进行传递,画出它们的综合结构图,可降低解题难度.

◆ 探究点二　充要条件的证明

例 2 已知△ABC 的三边长为 a,b,c,其中 $a=2$.求证:△ABC 为等边三角形的充要条件是 $b^2+c^2-2(b+c)=bc-4$.

变式 求证:方程 $mx^2-2x+3=0(m\neq 0)$有两个同号且不相等的实根的充要条件是 $0<m<\frac{1}{3}$.

[素养小结]

证明充要条件时要从充分性和必要性两个方面分别证明,首先分清哪个是条件,哪个是结论,然后确定推出方向,即充分性需要证明"条件"⇒"结论",必要性需要证明"结论"⇒"条件".

◆ 探究点三　充分条件、必要条件、充要条件的应用

例 3 已知集合 $P=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 6\}$,非空集合 $S=\{x\mid 1-m\leqslant x\leqslant 1+3m\}$.

(1)若"$x\in P$"是"$x\in S$"的必要条件,求实数 m 的取值范围.

(2)是否存在实数 m,使"$x\in P$"是"$x\in S$"的充要条件?

变式 已知集合 $A=\{x\mid 4<x\leqslant 8\}$,$B=\{x\mid 5-m^2\leqslant x\leqslant 5+m^2\}$.设 $p:x\in A$,$q:x\in B$,若 p 是 q 的必要不充分条件,求实数 m 的取值范围.

[素养小结]

应用充分不必要条件、必要不充分条件及充要条件求参数值(范围)的一般步骤:

(1)根据已知将充分不必要条件、必要不充分条件或充要条件转化为集合间的关系;

(2)根据集合间的关系构建关于参数的方程(组)或不等式(组)求解.

1.5　全称量词与存在量词

1.5.1　全称量词与存在量词

【学习目标】

通过已知的数学实例，理解全称量词与存在量词的意义.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ 知识点一　全称量词与全称量词命题

1. 全称量词的定义与表示：短语“所有的”“任意一个”在逻辑中通常叫作全称量词，并用符号“________”表示.

常见的全称量词有：所有的、任意一个、每一个、全部.

2. 全称量词命题的定义及表示：含有________的命题叫作全称量词命题.“对 M 中任意一个 x，$p(x)$成立”可用符号简记为$\forall x\in M$，$p(x)$.

◆ 知识点二　存在量词与存在量词命题

1. 存在量词的定义与表示：短语“存在一个”“至少有一个”在逻辑中通常叫作存在量词，并用符号“________”表示.

常见的存在量词有：存在一个、至少有一个、有一个、有些.

2. 存在量词命题的定义及表示：含有________的命题叫作存在量词命题.“存在 M 中的元素 x，$p(x)$成立”可用符号简记为____________.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)“对每一个无理数 x，x^2 也是无理数”是全称量词命题，也是真命题.　(　　)

(2)“至少存在一个 $x\in\mathbf{Z}$，x 能被 2 和 3 整除”是存在量词命题且是真命题.　(　　)

(3)“任给 $x\in\mathbf{Z}$，$2x+1$ 为奇数”是全称量词命题且是真命题.　(　　)

(4)“存在一个四边形，它的两条对角线互相垂直”是存在量词命题且是假命题.　(　　)

课中探究　考点探究　素养小结

◆ 探究点一　全称量词命题与存在量词命题的判断

例 1　判断下列语句是全称量词命题，还是存在量词命题.

(1)凸多边形的外角和等于 360°；

(2)有些实数没有倒数；

(3)三个连续整数的乘积是 6 的倍数；

(4)存在一个二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴无交点.

变式　将下列命题用“$\forall$”或“$\exists$”表示.

(1)实数的平方是非负数；

(2)方程 $ax^2+2x+1=0(a<0)$至少存在一个负根；

(3)设 A，B 为两个集合，满足 $A\subseteq B$；

(4)有些自然数，它的算术平方根是自然数.

[素养小结]

(1)判断一个命题是否为全称量词命题,主要看命题中是否有“所有的”“任意一个”“一切”“每一个”“任给”等全称量词,有些命题的全称量词是隐藏的,要仔细辨别.

(2)判断一个命题是否为存在量词命题,主要看命题中是否有“存在一个”“至少有一个”“有些”“有一个”“有的”等存在量词,有些命题的存在量词是隐藏的,要仔细辨别.

◆ 探究点二　全称量词命题与存在量词命题真假的判断

例2 判断下列全称量词命题的真假.

(1)所有的素数都是奇数.

(2)$\forall x\in \mathbf{R}, x^2+1>\frac{1}{2}$.

(3)任何一个三角形都有一个外接圆.

变式 判断下列存在量词命题的真假.

(1)有的集合中不含有任何元素.

(2)有的平行四边形的四个角都相等.

(3)存在一个实数 x,使 $x^2+2x+4=0$.

(4)有些整数只有两个正因数.

[素养小结]

判断全称量词命题和存在量词命题的真假时,一定要结合生活中的实例,运用相关的数学知识进行判断.有些命题没有直接给出量词,需要自己“破译”,找出其中隐含的量词,判断其是全称量词命题还是存在量词命题,进而再判断其真假.

◆ 探究点三　利用全称量词命题与存在量词命题求参数的范围

例3 已知集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$,非空集合 $B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$,

(1)若 $p:\forall x\in B, x\in A$ 是真命题,求 m 的取值范围;

(2)若 $q:\exists x\in A, x\in B$ 是真命题,求 m 的取值范围.

变式 若命题“$\exists x\in \mathbf{R}, x^2-4x+a=0$”为真命题,则实数 a 的取值范围是________.

[素养小结]

根据全称量词命题与存在量词命题的真假等价转化为关于集合间的关系或函数的最值问题,再转化为关于参数的不等式(组)求参数的取值范围.

拓展 (多选题)已知 $a>0$,函数 $y=ax^2+bx+c$,若 m 满足关于 x 的方程 $2ax+b=0$,当 $x=m$ 时,$y=ax^2+bx+c$ 的函数值记为 M,则下列选项中的命题为真命题的是　　(　　)

A. $\exists x\in \mathbf{R}, ax^2+bx+c\leqslant M$

B. $\exists x\in \mathbf{R}, ax^2+bx+c\geqslant M$

C. $\forall x\in \mathbf{R}, ax^2+bx+c\leqslant M$

D. $\forall x\in \mathbf{R}, ax^2+bx+c\geqslant M$

1.5.2 全称量词命题和存在量词命题的否定

【学习目标】

1. 能正确使用存在量词对全称量词命题进行否定.
2. 能正确使用全称量词对存在量词命题进行否定.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ 知识点 全称量词命题与存在量词命题的否定

1. (1)全称量词命题的否定：$\forall x\in M,p(x)$，它的否定：$\exists x\in M$，________，也就是说，全称量词命题的否定是存在量词命题.

(2)存在量词命题的否定：$\exists x\in M,p(x)$，它的否定：________________，也就是说，存在量词命题的否定是全称量词命题.

2. 常见命题的表述

命题	全称量词命题	存在量词命题
表述	①对所有的 $x\in M$，$p(x)$恒成立； ②对一切 $x\in M$，$p(x)$恒成立； ③对每一个 $x\in M$，$p(x)$恒成立； ④任给一个 $x\in M$，$p(x)$恒成立； ⑤对任意一个 $x\in M$，$p(x)$恒成立	①存在 $x\in M$，使 $p(x)$能成立； ②至少有一个 $x\in M$，使 $p(x)$能成立； ③有些 $x\in M$，使 $p(x)$能成立； ④至少存在一个 $x\in M$，使 $p(x)$能成立； ⑤对某些 $x\in M$，$p(x)$能成立

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)"所有的菱形都是平行四边形"的否定是"存在一个菱形不是平行四边形". ( )

(2)"任意奇数的平方还是奇数"的否定是"所有奇数的平方都不是奇数". ( )

(3)"有些实数的绝对值是正数"的否定是"$\forall x\in \mathbf{R},|x|\leqslant 0$". ( )

(4)从存在量词命题的否定看，是对"量词"和"$p(x)$"同时否定. ( )

课中探究 考点探究 素养小结

◆ 探究点一 全称量词命题的否定

例 1 写出下列全称量词命题的否定，并判断所得命题的真假.

(1)所有自然数的平方都是正数；

(2)$\forall x\in \mathbf{R},x^2+2x+1\neq 0$；

(3)等腰梯形的对角线相等.

变式 写出下列全称量词命题的否定，并判断所得命题的真假.

(1)任何一个末位数字为 9 的整数都能被 3 整除；

(2)所有的素数都是奇数；

(3)$\forall x,y\in \mathbf{R},x^2+y^2+2x-4y+5=0$；

(4)$\forall x\in \mathbf{R},x^2+1>0$.

[素养小结]

(1)对全称量词命题进行否定的两步操作：①找到命题所含的量词，没有量词的要结合命题的含义加上量词，再改变量词；②对原命题的结论进行否定.

(2)判定全称量词命题"$\forall x\in M,p(x)$"是真命题，需要对集合 M 中的每个元素 x，证明 $p(x)$成立；要判定一个全称量词命题是假命题，只要举出集合 M 中的一个特殊值 x，使 $p(x)$不成立即可.

◆ 探究点二　存在量词命题的否定

例 2 写出下列存在量词命题的否定,并判断所得命题的真假.

(1)有些三角形的三个顶点不在同一个圆上;

(2)有一个奇数不能被 3 整除;

(3)存在 $k\in \mathbf{R}$,使函数 $y=kx+b$ 随 x 的增大而减小.

变式 写出下列存在量词命题的否定,并判断所得命题的真假.

(1)存在一个实数,它的绝对值不是正数;

(2)有些三角形是等边三角形;

(3)有些无理数不是实数.

[素养小结]

存在量词命题的否定,是在否定结论 $p(x)$ 的同时,改变量词的属性,即将存在量词改为全称量词.要判断存在量词命题是真命题,只要在限定集合内至少能找到一个 x,使 $p(x)$ 成立即可,否则就是假命题.

◆ 探究点三　全称量词命题、存在量词命题的应用

例 3 若“$\exists x\in\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$,$2x-\lambda x+1<0$”是假命题,则实数 λ 的取值范围是　　(　　)

A. $\lambda\leqslant\frac{5}{2}$　　B. $\lambda\leqslant 3$

C. $\lambda\geqslant\frac{5}{2}$　　D. $\lambda\geqslant 3$

变式 已知 p:$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2+4x\geqslant m$,则 p 的否定是________,若 p 的否定是假命题,则实数 m 的取值范围为________.

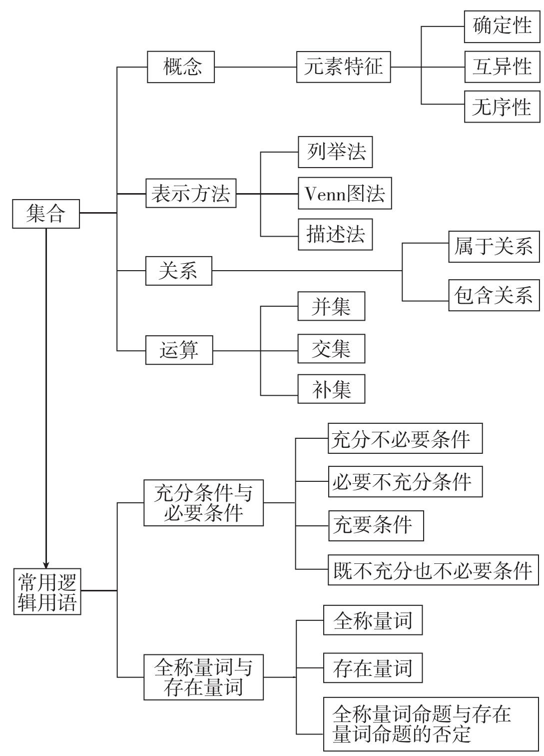
[素养小结]

(1)p 与 p 的否定只能一真一假,解决问题时可以相互转化.

(2)在求参数范围的问题中,往往分离参数,转化成求函数的最值问题.

本章总结提升

知识网络



素养提升

◆ 题型一　集合的概念、集合的基本关系

[类型总述] (1)集合中元素的互异性;(2)集合的基本关系.

例 1 (1)(多选题)下列表述正确的有　　(　　)

A. $-1\notin\mathbf{Z}$

B. $\pi\in\complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$

C. $\{x||x|<0\}\subseteq\{0\}$

D. $\mathbf{N}^*\subsetneqq\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}$

(2)已知 $m\in\mathbf{R}$,$n\in\mathbf{R}$,若集合 $\left\{m,\frac{n}{m},1\right\}=\{m^2,m+n,0\}$,则 $m^{2025}+n^{2025}=$________.

变式 集合 $M=\left\{m\left|\frac{10}{m+1}\in\mathbf{Z},m\in\mathbf{Z}\right.\right\}=$____________________(用列举法表示).